R3数楽通信第二十二号 「プリンプトン322 」 R3.11.13

古代史の数学ミステリー　そのⅢ　最後のどんでん返し

前二回では、ﾌﾟﾘﾝﾌﾟﾄﾝﾚ322には、驚くべき古代の数学知識が隠されていたことを述べました。これに対して、全く違う説を唱えたのがメソポタミア古代史研究家のエレノア・ロブソンです。彼女の説を理解するには、中学・高校での最も初歩的で、最も重要な展開・因数分解の公式　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ の理解が

ｴﾚﾉｱ･ﾛﾌﾞｿﾝ

必要です。いや、逆にこの公式をしっかり理解してもらうために、この回を書いていると言っても良いでしょう。それを理解できれば、後は電卓の活用です。

$(x+y)^2$　は　$(x+y)(x+y)$　ですから　「マイナス×マイナス」で話した分配法則で展開（(　）をはずす）ことができます。文字式の展開を習い始めの中学生がよくやる

$(x+y)^2 = x^2+y^2$ は $\boxed{\text{間違い}}$ということは、しっかり頭に入れてください。

前の（　）をひとかたまりとみて　$(x+y)x+(x+y)y$　それから後ろから掛けて

$xx+yx+xy+yy$　　xx は x^2　　yyは y^2　　yx は xy とおなじで　$x^2+xy+xy+y^2$

$xy+xy$ は $2xy$ ですから　$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$　です。

右のように　一辺　x+yの正方形の図にすれば 2xyが必要なイメージがつかみやすいでしょう。そして　$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$

ここで、もう一手加えます。それは逆数　掛けて１となる数です。

	x	y
x	x^2	xy
y	xy	y^2

$2\times\frac{1}{2}=1$ ですから　2の逆数は $\frac{1}{2}$ です。同様に　3の逆数は $\frac{1}{3}$

xの逆数は $\frac{1}{x}$　　これで $(x+\frac{1}{x})^2$と $(x-\frac{1}{x})^2$　を考えます。

$x\times\frac{1}{x}=1$ から　$(x+\frac{1}{x})^2=x^2+2x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2 = x^2+2+(\frac{1}{x})^2$ ・・・①

$(x-\frac{1}{x})^2=x^2-2x\cdot\frac{1}{x}+(\frac{1}{x})^2= x^2-2+(\frac{1}{x})^2$ ・・・②

ですから　①－②　をつくると　4　で　$4=2^2$　ですから

$(x+\frac{1}{x})^2-(x-\frac{1}{x})^2=2^2$ 移項すると　$(x+\frac{1}{x})^2=(x-\frac{1}{x})^2+2^2$

と　三平方の定理（ピタゴラスの定理の形になりました。

勘の良い方は、後は代入と気づいたかもしれません。

x に適当な数を代入（文字に数を入れること）して、両辺に分母のを掛ければ三平方の定理を満たす三つの数の組（ピタゴリアン・トリプル）が得られるはずです。

まず　x=1 では　$x-\frac{1}{x}$ が $1-\frac{1}{1}=1-1=0$ になってしまうので

x= 2 を代入してみましょう　裏へ続く

ここから、　これぐらいは　手計算で　やってもいいですが
分数の計算に不安がある人は、電卓を使っても良いでしょう。
分数でよく間違うのは、計算ルールが間違って頭に入っている場合が多いのです。
電卓を使っていくうちに、正しい分数計算のやり方も頭に入ります。
幸い、皆さんもご存じのように、このたび、北野生涯教育振興会様から
頂いた教育研究助成金で、分数計算のできる電卓が購入できました。
小数⇔分数　帯分数⇔仮分数　の変換や　約分、余りを出す割り算など
初等的な計算は、すべてできます。
ここは、多くの例で、　ﾌﾟﾘﾝﾌﾟﾄﾝﾚ322の秘密を探るのが目的ですから
どんどん活用しましょう。その過程で、数学的な事柄の理解も深まります。

x= 2 を代入すると $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,　$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$(\frac{5}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 + 4$　両辺に $2^2=4$　をかけると　$5^2 = 3^2 + 4^2$

となじみのある　(5,4,3)　がでてきました。
それでは、表の大きなピタゴラススの組は、どうやって出てきたのでしょうか?
その鍵は六十進数のようです。最初の　1:59=119 2:49=169 を例にとると
６０より小さい桁の59 と49を見ると　６０と共通な約数を持っていません。

$169^2-119^2=14400=4\times3600$　で　$3600=60^2$　ですから　60^2 で両辺を割ると

$(\frac{169}{60})^2 = (\frac{119}{60})^2+2^2$　で　$2=\frac{120}{60}$　ですから

$(\frac{169}{60})^2 = (\frac{119}{60})^2 + (\frac{120}{60})^2$　　(169 , 119 ,120)　がでてきます。

x としては　$(\frac{169}{60}+\frac{119}{60})\div 2=\frac{12}{5}$　をとったことになります。

後の数も、電卓を使えば、時間と忍耐さえあれば、見つけられます。
これらのことから、ｴﾚﾉｱ･ﾛﾌﾞｿﾝ　は、プリンプトン322は、宮廷の書記官
（現代の高級官僚に相当）の養成のための６０進数の計算練習問題だと結論しました。
プリンプトン322と同時代の粘土板に、そのような練習問題があり、一方、三角比や
ピタゴラスの定理に関する粘土板は、現在の所見つかっていないという状況証拠もあります。彼女はこの説で、2003年度のアメリカの数学協会のスター・R・フォード賞を受賞しました。しかし、４０００年も前の本当のところは、誰もわかりません。
「羅生門」のようなものでしょうか?　羅生門は、日本映画が初めて、国際グランプリ（ベネチア映画祭金獅子賞）を獲得した昭和の名作で、監督の黒澤明は、ジョージ・ルーカスやスティーブン・スティルバーグほか、多くの海外の監督が手本にしたという映画史に残る名監督です。いつか見てみるのも、いいかもしれません。
私としては、最初の数学史家オットー・ノイゲバウアーの、４０００年前に
三角比の表が存在したという方が、ロマンがあって惹かれるのですが?
しかし、これはシュメール人宇宙人説と同じと言われるかもしれませんね。