



宇田川榕菴

二月の数学検定を目指して、一斉授業では「比」の話をしています。「比」とは、「比べる」という読みからわかるように、二つまたはそれ以上の量を比べることですが、比べるには二つの方法があります。引き算で比べるか、割り算で比べるかです。引き算で比べると、結果はどちらがどれだけ多いか少ないかとなります。割り算で比べると、どちらがどちらの何倍か、何分の何かとなります。数学で「比」というときは、割り算の方を指します。また計算せずに $n:m$ (n 対 m) という表現もよく使います。この比の練習については数楽通信番外号に載せておきます。ここでは、この比と関係して、 $\sqrt{2}$ のような数をなぜ無理数と言うかについて説明してみます。ここからは、推測の部分もありますので、正確なことをご存じの方はご連絡ください。日本は明治維新前、幕末頃から蘭学（オランダ語）を通し、西洋の進んだ文化、学術を取り入れました。それまで日本の学問になかったような新しい考え、概念 (concept) には、漢字を用いてもとの言葉の意味になるべく近い訳語を作りました。幕末の津山藩藩医で蘭学者(オランダ語)、宇田川榕菴は元素、酸化、還元、溶解、分析といった化学用語、酸素、水素、窒素、炭素、白金といった元素名や細胞、属といった生物学用語を考え出しました。珈琲には漢字そのものを考案したということです。さて、無理数とは分数で表されない数という意味です。こういった概念は江戸時代までの日本にはなかったでしょうから、明治維新後、西洋の数学から取り入れたでしょう。無理数は英語で irrational number です。ratio は通貨の交換 rate と同じで比を表します。regular にたいして、irregular のように ir が否定の接頭辞ですから、否定される前の rational number は比で表される数すなわち分数ということになります。これは有理数と訳され、これから否定の有理数でない数が無理数となったのです。しかし、有理数は比で表される数ですから、有比数、無理数は無比数の方が意味を表している訳のような気がします。この理由は以下のように推測されます。もうひとつ ratio に関係する言葉に rationalism というのがありました。これが、合理主義と訳されたのです。この合理主義は、明治の文明開化時に、西洋から取り入れられた思想の根本ともなるものでした。こう訳したのは、誰でしょうか。「数と理とこの二つのものからすべてを割り出していきたい。」と福翁自伝で述べたのは福沢諭吉でした。ご存じの方はお教えてください。ピタゴラスについて話したときのように、ギリシャ哲学にとっては、比は調和であり、筋の通った議論・論理にも、比で表される調和が重要でした。ギリシャ思想を表す代表的な言葉「ロゴス」は、言葉を通じて表される理性的活動、言語・思想を表す言葉ですが、同時に比という意味も持っているのです。この rationalism を合理主義と訳したことによって、比で表されない数は、無理数という、少し意味の上からは、無理な訳語を充てられたわけです。

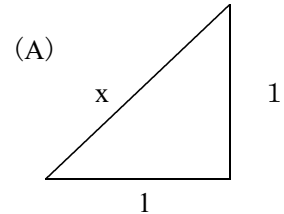
納得のいく言葉で分類できる用意ができました。1,2,3,4・・・といった数を自然数といいます。小さい子が自然に数を数えるところなりますね。これは Natural number です。これに 0 と -1,-2,-3,-4・・・を加えたのが整数 Integer です。自動車にインテグラというのがありましたね。これには、完全なもの、欠けたところがないものといった意味があります。分数は Fraction これは、かけらという意味で「フラクタル」も同じ語源です。整数も分母

が1の分数とみて、整数・分数をあわせて有理数です。小数は、実は非常に新しく、数百年の歴史しかありません。これは、前に述べた、0の発見と位取り記数法が確立してからでなければ、小数記法は、成立しなかったからです。分数の形で、表されない数が無理数でした。この有理数と無理数を合わせたものが、実数 **Real number** です。

それでは、実数でない数は、あるのでしょうか。それが次回のテーマです。

なぜピタゴラスの夢は破綻したか その原因となった定理

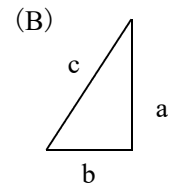
ピタゴラスの夢が破れたのは、一辺1の正方形のような最も基本的な図形の対角線が、比の形で表されないということからでした。これは、直角二等辺三角形では、等しい辺が1のときの斜辺の長さです。



この直角三角形に（* ）を適用すれば、斜辺の長さが計算できます。（ ）に入る正しい定理を、以下の定理から2つ選びなさい。

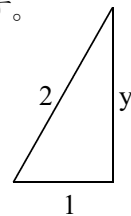
- ア 三立方の定理 イ アリストテレスの定理 ウ 1平方mの定理 エ ピタゴラスの定理
オ プラトニックの定理 カ 三平方の定理

このような二つ名前の定理は、この定理の重要性を示しています。この定理を三辺の長さが a,b,c の直角三角形(B)に適用すると次のような式になります。 ()=()+()



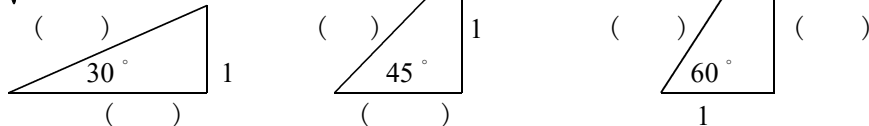
上の式を (A)に適用し、斜辺の長さ x を求めましょう。

直角三角形(A)は、一辺1の正方形を対角線で、二等分したものです。一辺2の正三角形を、頂点から底辺に垂線をおろして二等分すると右のような直角三角形(C)となります。直角三角形(C)の高さに当たる辺 y の長さを（* ）を適用して、求めなさい。



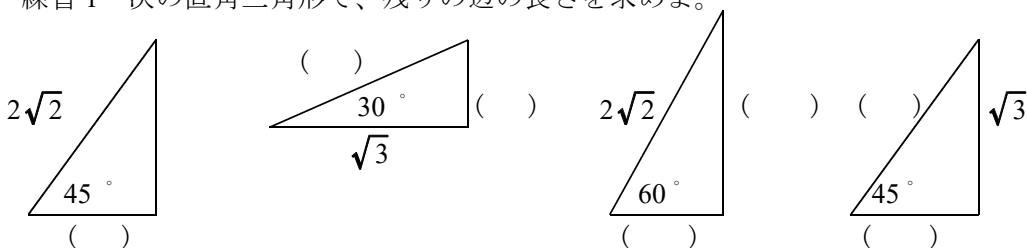
これらのことから次のような直角三角形の辺の比が求められます。

（2 と $\sqrt{3}$ の大小関係に注意）

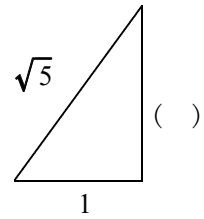
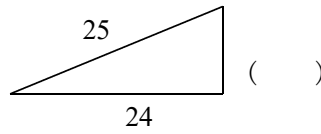
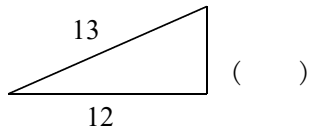


$30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の \sin, \cos, \tan の値は、これらの三角形から定義 s, c, t により求められます。

練習1 次の直角三角形で、残りの辺の長さを求めよ。



練習2 次の直角三角形で(＊)を適用して、残りの辺の長さを求めよ。



なぜピタゴラスの夢は破綻したか

ロゴス

ロゴス

logos

理性，言語，理法（法則），比例，定義などさまざまに訳されるギリシア語で，古代哲学，神学における重要な概念。ヘラクレイトスはロゴスを万物の生成を支配する永遠の理法とし，ストア派は世界を合目的的に支配する原理として神と同一視した。

本文は出典元の記述の一部を掲載しています。

ロゴス（〈ギリシャ〉logos）

- 1 ギリシャ語で、言葉・理性の意。
- 2 古代ギリシャ哲学・スコラ学で、世界万物を支配する理法・宇宙理性。
- 3 など。
- 4 キリスト教で、神の言葉の人格化としての神の子イエス＝キリスト。

こ

数楽通信⑦ 「方程式 $x^2 = -1$ 」 に解はあるか H27.5.25

ところが 両辺を二乗し、 p^2 を移項すると、 $2p^2 = q^2$ となり、これは少し考えれば分かるように、矛盾しています。

が、 $2p^2$ は偶数で、奇数の $\sqrt{2}$ 二乗は奇数ですので矛盾で $\sqrt{2}$ す。p が奇数なら,q は偶数ですが、両辺での 2 の個数を考えると、左辺では一個で奇数、

Boule, from the French for "ball", is a traditional shape of French bread, resembling a squashed ball. It is a rustic loaf shape that can be made of any type of flour. A boule can be leavened with commercial yeast, chemical leavening, or even wild yeast sourdough. The name of this bread is the reason a bread baker is referred to as a "boulangier" in French, and a bread bakery a "boulangerie."

右辺は偶数の二乗ですので、偶数個のはずで、やはり矛盾。「 が分数で表される。」
ことが否定されたので、「 が分数で表されないこと」しかありえないわけです。

背理法は、直接証明に比べ、すっきり分かった感じがしないのですが、現代数学でも、

ルートの計算のトレーニング

ルートの計算を、まだ 2 で割って、割って、3 で割って、割ってなどと
やっている人は 次のように 4, 9, 16, 25, 36 に気がつくようになると速いでしょう。

4 を見つける。4 が 2 になってルートの外に出る。

- ① $8=4 \times ()$ ② $12=4 \times ()$ ③ $20=4 \times ()$
④ $24=4 \times ()$ ⑤ $28=4 \times ()$ ⑥ $60=4 \times ()$
① $\sqrt{8} =$ ② $\sqrt{12} =$ ③ $\sqrt{20} =$
④ $\sqrt{24}$ ⑤ $\sqrt{28} =$ ⑥ $\sqrt{40}$

9 を見つける。9 が 3 になってルートの外に出る。

- ① $18=9 \times ()$ ② $27=9 \times ()$ ③ $45=9 \times ()$
⑦ $\sqrt{18}$ ⑧ $\sqrt{27}$ ⑨ $\sqrt{45}$

16, 25 を見つける。16 が 4, 25 が 5 になってルートの外に出る。

- ① $32=16 \times ()$ ② $48=16 \times ()$ ③ $80=16 \times ()$
④ $50=25 \times ()$ ⑤ $75=25 \times ()$ ⑥ $125=25 \times ()$
① $\sqrt{32}$ ② $\sqrt{48}$ ③ $\sqrt{50}$
④ $\sqrt{75}$ ⑤ $\sqrt{80}$ ⑥ $\sqrt{125}$

平方根を含んだ数の展開は、マス目で

① $(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$ ② $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ ③ $(4\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

公式①でもよいが、マス目が確実

④ $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=$ ⑤ $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2=$

有理化 分母は公式② 分子はマス目

⑦ $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=$ ⑧ $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=$

難問といわれる問題は、直接証明は難しく、背理法によって証明されることが多いのです。ともあれ、この証明はピタゴラスの夢を打ち砕く、ギリシャの哲学者たちにも、大きな衝撃を与えたのでした。

ここで、**自然数**と**整数**の違いを確認しておきましょう。ギリシャ時代には、**負の数**は数として認められていませんでしたから、ピタゴラスが宇宙の原理を表す素材として考えていたのは、1,2,3,4・・・という数です。誰でも数を初めて数え始めた頃は、1,2,3,4・・・と数えますね。ですからこのような数を自然数といいます。そして、前々号で述べたように、ギリシャ時代から千年以上後に数として扱われるようになった**0**、さらに数百年後のルネサンス後に計算法が確立した、負の整数を含めたもの(・・・,-3,-2,-1,0,1,2,3,4・・・)を整数といいます。自然数は英語で **Natural number**, 整数は、Excelの関数にも INT がありますが、**Integer** です。

小数での表現は、**0** を用いる位取り記数法で、**0** 以下の数を表すため、まだ使われ出して数百年です。分数の数千年の歴史に比べ非常に新しいのです。

になることを発見した。

今日、前者は完全8度、後者は完全5度の協和音といわれている。

また、4対3 のときは、完全4度の協和音という。

このような性質を持つ数の組として、

$$12 \quad 8 \quad 6$$

と、

$$12 \quad 9 \quad 6$$

が知られている。

このとき、 $12 \quad 9 \quad 8 \quad 6$ に対応して、ド・ファ・ソ・ド がまず決定される。

他の音は、この4音を基本として、次のようにして定められる。

「レ」の音・・・ソの音と完全4度の音

すなわち、 $X : 8 = 4 : 3$ より、 $X = 3 \frac{2}{3}$ として、弦の長さが定まる。

「ラ」の音・・・レの音と完全5度の音

すなわち、 $3 \frac{2}{3} : X = 3 : 2$ より、 $X = 6 \frac{4}{9}$ として、弦の長さが定まる。

「ミ」の音・・・ラの音と完全4度の音

すなわち、 $X : 6 \frac{4}{9} = 4 : 3$ より、 $X = 2 \frac{56}{27}$ として、弦の長さが定まる。

「シ」の音・・・ミの音と完全5度の音

すなわち、 $2 \frac{56}{27} : X = 3 : 2$ より、 $X = 5 \frac{12}{81}$ として、弦の長さが定まる。

以上で定まる弦の長さをもとに、実際に楽器を作ってみたら、どんな風に聞こえるのだろう。

時間があったら、是非作ってみたいものだ。みなさんも、いかがですか？

さらに、6、8、9、12 の4つの数に、6の完全8度の数としての3 を付け加えてみると、

$$3 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 12$$

の5つの数の間に、数学的に美しい関係が成り立つ。

6 は、3 と 12 の相乗平均である。(相乗平均については、こちら)

8 は、6 と 12 の調和平均である。(調和平均については、こちら)

9 は、6 と 12 の相加平均である。(相加平均については、こちら)

数学的に美しいということは、音として聞いても美しいということで、ピタゴラスがひたすら

求めた「宇宙の本質」というものの雰囲気は何となく伝わってくるような気がする。

船越栄一郎 アリバイ 背理法
崖の上 証明の難しい

アリバイ (英: **alibi**[† 1]) または現場不在 (げんじょうふざい) は、犯罪等で被疑者・被告人が犯行に関わっていないことを推認させる間接事実の一つ。ラテン語の **alius ibi** (他の場所に) に由来する。

アリバイ (英: **alibi**[† 1]) または現場不在 (げんじょうふざい) は、犯罪等で被疑者・被告人が犯行に関わっていないことを推認させる間接事実の一つ。ラテン語の **alius ibi** (他の場所に) に由来する。

背理法による証明

まずは定番の証明です。教科書で背理法を習うときに具体例として紹介されることが多い方法です。

(証明)

2 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する。

このとき、互いに素な正の整数 p, q を用いて $2\sqrt{2} = qp$ とおける。

両辺二乗して分母を払うと、 $2p^2 = q^2$

左辺は2の倍数なので q^2 は2の倍数。よって q は2の倍数。

すると、 q^2 は4の倍数になるので、 p^2 が2の倍数。よって p も2の倍数。

これは p と q が互いに素であることに矛盾。

無理数はピタゴラス学派のメタポンタムのヒッパソスによって発見されたとき

れている。通説では、ヒッパソスが無理数を発見したのは 2 の平方根を分数として表そうと試みていたときであり、彼は 2 の平方根の無理性の（おそらく幾何学的な）証明を与えたといわれている。ところがピタゴラスは（有理）数の絶対性を信じていたため無理数の存在を受け入れることができなかった。ピタゴラスは論理的に無理数の非存在を示すことはできなかったが、その信念から無理数の存在を受け入れることができず、ヒッパソスを溺死の刑に処したとされている。

A4 B4

「ピタゴラスの定理」が何時、誰によって発見されたかは不明である。Heath のよると「発見は恐らく、ピタゴラス自身によるものではない、しかしピタゴラス学派によるものであることは確実である」。ピタゴラスの生存期間は BC 570-490 頃で、BC 470 年頃に生まれたデモクリトス (Democritus) は「無理直線と立体について」(on irrational line and solids) を書いた。そのため「 $\sqrt{2}$ が無理数であることが発見されたのはデモクリトスよりも以前であると結論せざるを得ない」

訳注 (1) 「ピタゴラスの定理」とは「 $\sqrt{2}$ が無理数であること」

(2) 引用されている Heath の文献は Sir Thomas Heath, A manual of Greek mathematics, 54-55

定理は 50 年以上も拡張されなかったようである。プラトンのテアイテトス (Theaetetus) には有名なくだりがあり、そこではテオドロス (Theodorus, プラトンの先生) が

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots$

が無理数であることを、別々に取り上げて、証明したことが記述されています。

岩波文庫 P30

ところが 17 の平方根に至って、何らかの理由で突然に中止しています。我々はテオドロスによるこの発見、あるいは別の発見に関して、正確な情報を持ち合わせていません。しかしプラトンの生存期間は BC 429-348 ですから、この発見はおよそ BC 410-400 年頃であろうとしてよいと思われます。

テオドロスがどのようにして定理を証明したかに関する問題は多くの歴史学者の巧妙な発想を喚起した。

通説では $\sqrt{2}$ が無理数であることを発見したのはメタポントムのヒッパソスとされています。

• ヒッパソス - Wikipedia

• Hippasus - Wikipedia

例によって日本語の Wikipedia にはほとんど記載がない。英語版の Wikipedia の一部を引用する。

ヒッパソスは時々、無理数の存在を発見したとされ、その結果、神の手により海でおぼれたとされる。ピタゴラス学派はすべての数が整数の比で表わされると説き、無理数の発見は彼らにショックを与えたと言われている。しかしながら、発見をヒッパソスに結びつける証拠は混乱している。

パプス (Pappus) が言っていることは、無理数の知識はピタゴラス学派に起源があり、最初に秘密を暴いた教徒がおぼれて死んだということのみである。イアンブリカス (Iamblichus) は一連のつじつまの合わない報告をしている。一つの話では、ピタゴラス教徒が無理数を暴いたことで単に追放されたことを説明しているが、球の中に正十二面体を作図する方法を暴いたことで、海でおぼれたピタゴラス教徒の伝説を引用している。別の話では正十二面体の作図法を世に知らしめて、それを自分がしたかのように言って (その結果) 海でおぼれたのはヒッパソスであるとしている。しかし、別の話では、同じ罰が無理数を暴露したピタゴラス教徒に下されている。イアンブリカスがはっきり述べていることは、海でおぼれたのは不敬な行動によっている点である。これらの話は通常、いっしょくたにされて、無理数の発見がヒッパソスによるものとされている。しかし、彼が発見したかどうか不明である。原理的には話は結びつけることができる。というのは正十二面体の作図をするときに無理数の発見をすることが可能であるからである。正五角形の黄金比において互減法が無限に続くことから、無理数であることが容易に読み取れるからである。

ボイヤー、「数学の歴史 1」、p 101 には次のように書かれています。

メタポントム (またはクロトン) のヒッパソスは、フィロラオスとはほぼ同時代で、もともとはピタゴラス学派だったが、のちに教団から追放されたといわれる。一説では、ピタゴラス学派はヒッパソスが死んだものとして墓石を建てたといわれている。別の話では、かれの背信行為は船の難破による死で罰せられたことになっている。このような教団との決裂の確かな理由はわからないが、一つには教団の秘密主義のせいもあったと思われる。しかし、次の三つの可能性も示されている。その一つは、ヒッパソスは保守的なピタゴラス学派のやりかたに反抗して民主的な運動の先頭に立ったため、政治的不服従のかどで追放されたのだとする説。2番目は、その追放を五角形か十二面体の幾何学 -- そのどちらかの作図であろう -- を暴露したせいであるとする説。3番目は、ピタゴラス学派の哲学にとってとんでもない意味をもつ数学上の発見 -- 通約不能量の存在 -- を暴露したため追放されたのだとする説である。

7. 古代ギリシャの数学はどのようにして現代に伝わったのか
古代ギリシャの数学のことには次のページが参考になります。

1. History Topics Index

2. Index of Ancient Greek mathematics

3. How do we know about Greek mathematics?

一番最初が目次で、次が「古代ギリシャの数学」に関する目次で、次が「古代ギリシャの数学をどのようにして知ることができるのか」という表題のページです。ここでは主に

このページから紹介したいと思います。但し、一部信頼できない部分があります。それは古代ギリシャ文字がいつできたのかという点です。このページでは BC 450 年ごろまではギリシャに文字がなく「口伝の伝承」(oral tradition) しかなかったとしてあります。しかし英語版の Wikipedia

1. Greek alphabet - Wikipedia

2. ギリシア文字 - Wikipedia

には紀元前 8 世紀頃にかけてギリシャ文字ができたとしています。日本語の Wikipedia にも類似の記載がありますから、多分信頼できそうです。しかし、この違いは無視できるかもしれません。その理由は古代ギリシャは 1 つの国ではなく、都市国家の連合体のため、都市国家ごとに事情が違っていたと考えることもできるためです。また文字があったにせよ、文字を記述するための媒体が広く使用されていないといけなはずです。

さて「古代ギリシャの数学をどのようにして知ることができるのか」のページの内容に戻ります。古代のギリシャ文字が記載されたもので現在まで保存されているものはほとんどないようです。部分的に陶器の破片に残されたものなどがあるだけのようです。当時はエジプトで使用されたパピルスに文字が記載されたとしており、ユークリッド原論も、パピルスの巻物に記述されたことが想定されるとしています。この場合 1 巻は 10 メートル程度の巻物となったようです。

パピルスはもろいため何度も読めばすぐにも損傷を受けてしまいます。また何もしなくても、パピルスはエジプトのように極めて乾燥した場所以外であれば、簡単に腐ってしまうようです。そのため、傷んできたら書き写す必要が出てきます。後世になり、羊皮紙に書き写されて始めて長期間の保存に耐えることができるようになったようです。この頃には巻物ではなく現在の書籍の形態をとっています。

ところが羊皮紙に書き写されても、古代ギリシャの数学には受難が待ち受けていたのです。羊皮紙は高価であったため、文字が記載されている羊皮紙を洗い流して、別の文字が記載されることもあったようです。これをパリンプセスト (palimpsest) と呼びます。パリンプセストでは、最初に書かれた文字は判読することができます。アルキメデスの本にはパリンプセストとして現在に伝わっているものがあるそうです。

いずれにせよ、羊皮紙が登場するまでは書籍は始終書き写す必要がありました。そのため、余りに多くの本を保存することが困難で、重要とされた本のみが後世に伝えられたのです。

だからピタゴラス学派が書いたものは残っていないのです。√2 が無理数であることより簡単な証明が、素因子分解とその一意性で示されるからであり、これはユークリッド原論から読み取れるからです。また各種の計算法 (とりわけ連分数展開) についての教科書も残っていないのです。計算法などを書籍の形で残すことは重要ではなかったからです。最低限重要なことを膨大な労力をかけて書き写し続けたのです。もっとも実際の書き

写しは身分の低い人がわずかな賃金をもらったことのようにです。

無理数の発見は古代ギリシャにまでさかのぼる。ピタゴラス教団は数を長さとして現れるものに限って議論し、すべての数は有理数で表されるとし、これは教団の教義として信奉された。しかしピタゴラスの定理からも示されるように2の平方根が無理数であることも自明であったが、教義に反するため受け入れられず、このことは今日から見れば自ずから制約を課せられていたと見なせる。無理数の発見を公言したヒッパソスは、教団から追放され殺害されたとする伝説が残る。

しかしプラトンが現れると、彼の著書『テアイテトス』の中で平方数でない数の平方根が有理数でないことを論じ、さらに同じ論法が立方根にも適用できると述べている。これらの数学的な蓄積を受けて、エウクレイデスは『原論』の中で統一した形で実数論を展開している。

すでに円周の長さが3より少し大きいことも知られていた。古代インドやギリシアの数学者たちの間では半径 r の円の面積が円周率 π を使って πr^2 であることも知られ、アルキメデスは半径 r の球の体積が $\frac{4}{3} \pi r^3$

であることを示していた。円周率 π が無理数であることはすでにアリストテレスによって予想されていたが、実際に証明されたのはそれよりはるかに後の時代のことである（ヨハン・ハインリヒ・ランベルト）。

河合先生

お疲れ様です。

参考になったと聞いて安心しました。

旭山動物園の板東園長を追ったドキュメンタリーは本日 DVD をお送りしました。

当時旭川局にいた僕の同期のディレクターの渾身の作品です。

DVD デッキでは問題なく見れるはずですが、パソコンで見るためには特殊なソフトがいります。

小樽の新日本風土記は、あいにく手元に録画したものがありませんでした。

一応、番組情報は以下の HP に掲載してあります。

<http://www.nhk.or.jp/fudoki/150306broadcast1.html>

上映についてですが、学校で放送する分には全く問題ありません。

http://www.nhk.or.jp/toppage/nhk_info/copyright.html

ただ、そのために NHK 自体から番組を取り寄せることは難しいと思います。

もし小樽の番組をどうしても見せたいということであれば、僕に言ってください。

番組を作ったディレクターとは親しくしているので、言えば DVD をもらえるかもしれません。

いまや悪名高き「総合学習・ゆとり教育」。

たしかにいろいろ問題もあったかもしれませんが、

まさにその理念の元に作られた後楽館で 6 年間過ごした身としては、

「いいところもあったよね」と言いたいところです。

今はかなりハードな形で揺り返しがきていますが、
いつか「総合学習・ゆとり教育が本当に目指したもの」が省みられる時がくると思っています。 取り急ぎ。

石垣竜