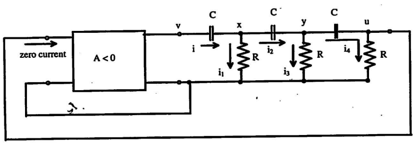
R3 数楽通信第 27 号　　「イマジン」と「ファンタジア」

HR3.12.17

G7 外相会議　夕食会の風景

先日、少しうれしいニュースをみました。林芳正外相が、主要 7 カ国（G7）外相会合の夕食会場となった英国リバプールのビートルズ・ストーリー博物館で、ジョン・レノンの代表作「イマジン」をレノンが愛用した白いピアノのレプリカで演奏し、各国外相から笑顔で拍手を送られたというものです。日本の外相が、こういった国際的な場で、しゃれたことができるというのは、誇らしい気がしました。「イマジン」は数楽通信第十一号でも書いたように、東西冷戦時代の歌で、リリースされたときはその名の通り夢想的で、現実離れしていると批評されたのですが、当時の若者の心を捉えました。現代は、また一時の雪解けムードからの反動か、独裁的な指導者が多くなり、きな臭い国際情勢です。しかし、数学での全く、実在のないイマナジナリーナンバー虚数が、様々な場面で活躍しているように、浮世離れしているという「イマジン」も、歌い継がれて欲しいものです。実在しない数、虚数についてのエピソードと言えば思い出されるのは、３００年来、解かれなかった数学の難問「フェルマーの最終定理」が二十世紀末に解かれたときのこと、当時 IQ 世界一といわれ、ニューヨークタイムスにもコラムを持っていた　マリリン ヴォス・サヴァントが　それについて、実在しない虚数を使って解いたので、証明になっていないという本を出版し、数学者から数学をわかっていないという批判を受けたことがありました。原著を読んでいないので、はっきり言えませんが、世間一般の IQ 神話も、鵜呑みにしてはいけないという気もしますね。そこで、虚数が現実に役に立っている例を紹介しておきましょう。 次の図は、交流のアンプ（増幅器） の電子回路（Electronic　Circuit）です。取り上げた理由は、この回路を出発点とした会社の株式の価値が現在数十億ドルになっているからです。この回路の素晴らしいところは、どんな小さな入力からでも任意の周波数の出力を取り出し、増幅することができるところです。次に、この回路を表す方程式（微分方程式といいます）と、その解を載せます。理解できなくても大丈夫、私も理解できていません。



$$\frac{d^3v}{dt^3}=\frac{d^3u}{dt^3}+\frac{6}{RC}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{5}{(RC)^2}\frac{du}{dt}+\frac{1}{(RC)^3}u.$$

ただ、 方程式には **j**（虚数） がないのに、その解には **j** が現れることに注目して下さい。電気では、 **i** は電流そのものをあらわすので虚数には **j** を使うのです。この方程式を解くには、虚数が必要なのです。この特別な発振機の基礎となる製品は、1930 年代の終わり頃、スタンフォード大学の大学院生ヒューレットとパッカードにより、開発されました。

$$\frac{U^+}{V^+}=\frac{-j\omega^3}{\left(\frac{1}{RC}\right)^3-\frac{6\omega^2}{RC}-j\omega\left[\frac{5}{(RC)^2}-\omega^2\right]}.$$

そう、先の会社の株式価値が、現在数十億ドルになっている会社とはヒューレット・パッカードです。彼らは、これを使って、sound-generator　（音源装置）をつくり、それをウォルト・ディズニー に売り込みました。そして、ディズニーは、これを音声効果を産み出すために使い、史上初のステレオ音声長編アニメを制作しました。その「ファンタジア」では音声効果が観客を魅了し、アニメの古典として、記念碑的作品となりました。おとぎの国の裏側では、魔法だけでなく、愛だけでもなく、虚数の i（あい） も働いていたのです。

「史上最大の難問が解けた!―ミズ IQ の「フェルマー最終定理の証明」事件簿」

虚数の性質と計算復習

数楽通信⑧でも、述べましたが　テスト前ですので　虚数の性質について復習しましょう。

虚数単位　$i=\sqrt{-1}$

よく質問がでてきた　$\sqrt{-3}\ \sqrt{-2}=\sqrt{(-3)(-2)}=\sqrt{6}$　とできないことについてもう一度説明しましょう。

きちんと、理解・納得できていないことは、定期試験ではかろうじてできても、少し時間がたった実力テストなどでは、全くできなくなってしまいます。皆さんは、普通科のように数学に時間をかけられないから、なおのことです。しかし、これを理解すれば、虚数の計算はずっとできるようになります。

まず、一年の今頃、a,b　が正の時は、　$\sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$　がなぜ成り立ったか振り返ってみましょう。

それは、両辺を二乗すれば、右辺は√の定義から　$(\sqrt{ab})^2=ab$

左辺は、掛け算の順序が交換できることから

$(\sqrt{a}\ \sqrt{b})^2=\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{a}\ \sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{b}=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2$　となり

やはり、√の定義から ab となるからでした。

ここで、二乗して等しくなったのですが、これからだけでは、$\sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$　は、いえません。　$\sqrt{a}\ \sqrt{b}=-\sqrt{ab}$　かもしれないからです。

しかし、√の定義　「２つある平方根のうち、正の方を表す。」
という約束があるから、もともと２つの正のものを二乗して等しくなったので、
もとの２つは等しいといえるのです。

ところが　$i=\sqrt{-1}$　は、想像上の数、正の数でも負の数でもないので

二乗して等しくなっても、なにもいえないのです。それどころか、上の式の両辺は
二乗して－１となりますが(そう決めたのでしたね。)、

$\sqrt{-1}\ \sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$　と計算すると、１と全く違った答えになるのです。
a,b が正と負なら、成り立つことも確認してください。

ですから、√の中が負の時は、たとえば　$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\ \sqrt{-1}=\sqrt{3}\,i$
のように　i でまず表すのです。

それから i　は普通の文字と同じように　計算すればよろしい。　a や x　と同じですね。

2+3i-(4-3i)=-2+6i　(-と(　)には気をつける) ただ i^2 が出てきたときは　-1　とします。

このときも、割り算・分母の実数化では、公式②が活躍します。

$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

これは練習して、覚えて使えるようにしましょう。

a+bi　と　a-bi　は共役複素数といいます、役は昔は軛(訓読み：くびき)と書いていました。右の図のように、牛、馬など、を馬車、牛車に繋ぐ際に用いる木製の棒状器具で、二つセットというイメージでしょう